Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană, Proba de baraj, 28 martie 2016

CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Subiect 1

Determinați numerele naturale nenule n pentru care ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ *are exact 5 soluții (x,y), x,y* $\in \mathbf{N}^*$. *(Observație: Soluțiile (x,y) și (y,x), x≠y, sunt distincte.)*

Soluție:

Fie (x,y) soluție$\Rightarrow y = \frac{nx}{x-n}$, deci (x,y) soluție $\Rightarrow x - n / nx$, $x \geq n+1$.

Atunci $(x-n)/(x-n)\cdot n - nx \Rightarrow x-n/n^2$. Prin urmare $x - n = d$, d/n^2, $d\in \mathbf{N}^*$.

Astfel $(x,y) = \left(n+d, \frac{n(n+d)}{d}\right)$...***3 p***

Dacă $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdot \ldots \cdot p_k^{a_k} \Rightarrow (2a_1+1)(2a_2+1)\ldots(2a_k+1) = 5 \Rightarrow a_l=2$ și restul sunt zero $\Rightarrow n=p_l^2$, p_l = prim...***4 p***

Subiect 2

Pe laturile AB și BC ale ΔABC se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele AMB și BNC, $m(\widehat{M})=90°$ *și* $m(\widehat{N})=90°$*. Să se demonstreze că, dacă D este mijlocul laturii (AC), atunci ΔMDN este dreptunghic isoscel.*

Soluție:

Cazul I. $m(\widehat{B})<90°$. Considerăm E, F mijloacele laturilor (AB) și (BC); $DF=\frac{AB}{2}=ME; DE=\frac{BC}{2}=NF$….***2p***

$m(\widehat{MED})=m(\widehat{NFD})=90°+m(\widehat{B})$…………………………………………………………….***1p***

$\Delta MED\equiv\Delta DFN(LUL) \Rightarrow [MD]\equiv[DN]$……………………………………………………..…….***1p***

$m(\widehat{EDN})=90°$…………………………………………………………………………………….. ***1p***

Cazul II $m(\widehat{B})=90°$………………………………………………………………………………… ***1p***

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Cazul III $m(\hat{B})>90°$……………………………………………………………………………***1p***

Subiect 3

Fie ΔABC și $D\in(BC)$ proiecția punctului A pe BC și P un punct pe (AD). Dacă $BP\cap AC=\{E\}$ și $CP\cap AB=\{F\}$ arătați că, $\widehat{FDA}\equiv\widehat{EDA}$.

Soluție:

Ducem prin A paralela d la BC, $DE\cap d=\{M\}$, $DF\cap d=\{N\}$. $\Delta AME\sim\Delta CED \Rightarrow \frac{AM}{CD}=\frac{AE}{EC}$ (1)……………***2p***

$\Delta ANF\sim\Delta BDF \Rightarrow \frac{AN}{BD}=\frac{AF}{FB}$ (2)………………………………………………………………………***2p***

Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{AM}{AN}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{AF}\overset{\text{T.Ceva}}{\Longrightarrow}1 \Rightarrow [AM]\equiv[AN]$..***2p***

ΔMND isoscel ([DA] = mediană și înălțime)⇒concluzia...***1p***

Subiect 4

Câte dintre numerele de 3 cifre, scrise în baza 10, se pot scrie sub forma $\overline{abc}+\overline{ab}+a$?

Soluție:

$\overline{abc}+\overline{ab}+a=\overline{def}+\overline{de}+d$

111a+11b+c=111d+11e+f⇒ 111(a-d)=11(e-b)+(f-c)∈{-108,-107,…,107,108}⇒

a-d=0⇒ a=d ⇒ e=b și f=c...***3p***

Dând valori cifrelor a, b, c obținem numere distincte de 3 sau 4 cifre.. ***1p***

Pentru $a=\overline{1,8} \Rightarrow \overline{abc}+\overline{ab}+a$ are trei cifre⇒ 8·10·10=800 numere..***2p***

Pentru a=9⇒$\overline{9bc}+\overline{9b}+9$ are trei cifre numai pentru b=c=0⇒ 1 număr.

În total sunt 801 numere..***1p***

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro